LS 9Avril Sfax **Devoir de contrôle n°2 (4M)** **Mr Masmoudi etMr Driss**

Exercice

Dans le plan orienté P, on considère un triangle ABC équilatéral de sens direct.

On pose: $B' = S_{(AC)}(B)$; $I = C * B$; $J = C * B'$; $K = A * I$; $L = A * J$ et $\omega = J * I$

On désigne par : r la rotation de centre A et d 'angle $\frac{\pi}{3}$ et $f = r \circ S_{(BC)}$

1) a) Déterminer f(B) et f(C). Caractériser f
   b) Déterminer f(I).En déduire la nature du triangle AIJ

2) Soit r' la rotation de centre J et d 'angle $-\frac{\pi}{3}$ et $g = S_{(AB')} \circ r'$

   a) Montrer que $r' = S_{(JK)} \circ S_{(JI)}$ .En déduire que $g = t_{\overrightarrow{IA}} \circ S_{(JI)}$

   b) En décomposant convenablement $t_{\overrightarrow{IA}}$ caractériser g

   c) Démontrer que fog est une translation dont on déterminera son vecteur

3) On pose $h = S_{(BC)} \circ r \circ S_{(BC)} = S_{(BC)} \circ f$ et $\Omega = S_{(BC)}(A)$

Montrer que $h = R_{(I\,;\,-\frac{\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{IJ}}$. Caractériser h

Problème

A)1) Soit φ la fonction définie sur IR_+^* par $\varphi(x) = x + 1 + \text{Log}x$

   a) Etudier les variations de φ. Montrer que l'équation : $\varphi(x) = 0$ admet ,dans IR_+^*, une solution unique β, vérifier que : $0{,}27 < \beta < 0{,}28$. Donner le signe de φ

   b) Tracer la courbe représentative (C) de φ dans un plan rapporté à un repère ON $(O, \vec{i}\,;\vec{j})$

2) Soit f la fonction définie sur IR_+ par : $f(x) = \frac{x\text{Log}x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

   a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en zéro

. b) Etudier les variations de f . Montrer que $f(\beta) = -\beta$

   c) Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis la limite de $\text{Log}x - f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
   Interpréter graphiquement le résultat obtenu

   d) Préciser les positions relatives des courbes représentatives γ et Γ respectivement des fonctions Log et f.

   Tracer γ et Γ dans un plan rapporté à un repère ON $(O', \vec{u}\,;\vec{v})$ (unité graphique 4 cm)

B) 1) Montrer que; $\forall\, n \in IN^*$, l'équation: $f(x) = n$, admet dans IR_+ une solution unique α_n.

   2) a) Etablir que $f(e^n) \leq n$. En déduire que $\alpha_n \geq e^n$.

   b) Montrer que $\text{Log}\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$. (1)

   c) Montrer que ; $\forall\, n \in IN^*$ on a : $0 \leq \text{Log}\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) \leq \frac{n}{e^n}$. En déduire la limite de $\text{Log}\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)$

puis celle de $\frac{\alpha_n}{e^n}$. lorsque n tend vers $+\infty$

3) On pose : $\alpha_n = e^n.(1 + x_n)$ avec $x_n \geq 0$

   a) A l'aide de (1) exprimer $.(1 + x_n)\text{Log}.(1 + x_n)$ en fonction de n

   b) Etablir que : $\forall\, t \in IR_+$ on a : $0 \leq (1 + t)\text{Log}(1 + t) - t \leq \frac{t^2}{2}$

c) Déduire de a) et b)que ;$\forall$ $n \in IN^*$ on a : $x_n \leq ne^{-n} \leq x_n + \frac{x_n^2}{2}$

Puis que : $0 \leq ne^{-n} - x_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n}$ et $0 \leq n - x_n e^n \leq \frac{n^2}{2} e^{-n}$

d) Déterminer la limite de $e^n + n - \alpha_n$ lorsque n tend vers $+\infty$

.